Exercice N°3

On considère la suite (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

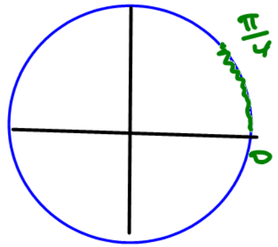
b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite (I_n)

3) Calculer I_2 et I_4



On considère la suite (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x \longmapsto \tan(x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$x \longmapsto (\tan(x))^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

il est clair que

$(\tan(x))^n \geq 0$ $\quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$